UNIVERSITÄT BIELEFELD

Fakultät für Mathematik

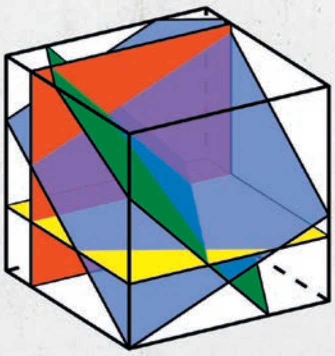
50 Jahre Universität Bielefeld

bielefeld zählt *weiter*

knobeln & gewinnen!

Ausführliche Lösungen der Rätsel

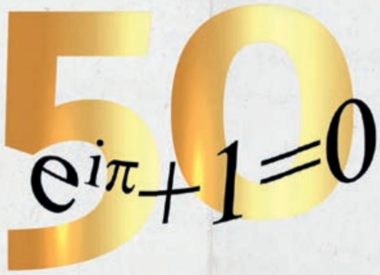
Ein Würfel wird durch vier ebene Schnitte in Stücke geteilt. Wie viele Stücke können dabei höchstens entstehen? Wie viele ebene Schnitte braucht man mindestens, um 50 oder mehr Stücke zu erhalten?



Das Bild zeigt eine möglicherweise nicht optimale Zerlegung des Würfels in 14 Stücke.

© Grafik: Thorsten Hüels

Die Fakultät für Mathematik der Universiät Bielefeld blickt auf eine lange Tradition mathematischer Spitzenforschung zurück. In diesem Jahr wird die Fakultät 50 Jahre alt und damit fünfmal so alt wie das erste Bielefelder Großforschungsprojekt in Mathematik in dem Jahr war, in dem die Gründung der Fakultät genauso lang zurücklag wie der Start des ersten Großforschungsprojekt heute. In welchem Jahr startete das erste Großforschungsprojekt in Mathematik an der Universität Bielefeld?



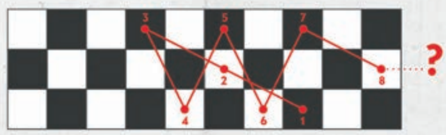
Gold: Designed by Freepik

Überschneidungen in Stundenplänen von Studierenden sollten vermieden werden. Aus diesem Grund sollen im Wintersemester 2019/20 die Vorlesungen „Algebra“, „Elemente der Mathematikdidaktik“, „Funktionentheorie“, „Integrationstheorie“ und „Stochastik“ an verschiedenen Wochentagen stattfinden. Die Lehrenden haben für die Vorlesungen die folgenden möglichen Veranstaltungstage angegeben:

- Algebra: Montag oder Freitag
- Elemente der Mathematikdidaktik: Dienstag, Mittwoch oder Freitag
- Funktionentheorie: Mittwoch oder Donnerstag
- Integrationstheorie: Montag oder Freitag
- Stochastik: Donnerstag oder Freitag

Können die Wünsche der Lehrenden erfüllt werden? Wenn ja, ist die Verteilung der Vorlesungen auf die Wochentage eindeutig?

Betrachte ein Schachbrett von 3 x 10 Feldern. Kann ein Springer (Pferd) auf einem Feld starten und so über das Schachbrett ziehen, dass jedes Feld genau einmal besucht wird und er am Ende auf das Ausgangsfeld zurückkehrt? Wenn ja, wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?



Das Bild zeigt einen Versuch, der nicht aufgegangen ist.

Pferd: Designed by rawpixel.com / Freepik

Rätsel „Würfel“:

In dem Rätsel „Würfel“ wurde die Frage gestellt, in wie viele Stücke man einen Würfel mit vier ebenen Schnitten höchstens zerlegen kann und wie viele Ebenen gebraucht werden, um einen Würfel in 50 Stücke zu zerschneiden.

Lösung:

Die richtige Antwort lautet: Vier Ebenen zerlegen einen Würfel in höchstens 15 Stücke. Um 50 Stücke zu bekommen, benötigen wir 7 Ebenen.

Die Antworten müssen wir noch begründen. Dazu können wir zunächst einmal vergessen, dass wir den Würfel zerlegen wollen und fragen uns, in wie viele Stücke man mit 1, 2, 3, ... n Ebenen den ganzen dreidimensionalen Raum höchstens zerlegen kann. Wie man das Ergebnis auf den Würfel dann überträgt und zur ursprünglichen Fragestellung zurückkehrt, erläutern wir am Ende.

Zunächst stellen wir fest: Jedes Mal, wenn zwei der verwendeten Ebenen parallel sind, drei von ihnen sich in parallelen Geraden schneiden oder vier von ihnen durch einen Punkt gehen, „verlieren“ wir Schnittgeraden, Schnittpunkte und damit Teilstücke des Raumes. Entsprechend erhalten wir die gefragte maximale Anzahl Teilstücke dann, wenn jede Ebene alle andern schneidet, wenn zwei Schnittgeraden in derselben Ebene sich immer schneiden und wenn alle diese Schnittpunkte verschieden sind, also jeder Punkt auf höchstens drei Ebenen liegt. In der Mathematik sprechen wir in diesem Fall von Ebenen „in allgemeiner Lage“. Wir müssen nun zwei Dinge klären:

1) Gibt es zu jeder Anzahl n eine Ebenenkonfiguration in allgemeiner Lage und
2) in wie viele Teilstücke teilen diese Ebenen in allgemeiner Lage dann den gesamten Raum?

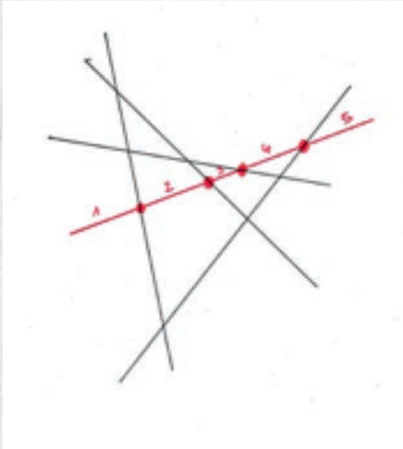
Zu 1):
Zwei Ebenen sind genau dann parallel, wenn Geraden, die senkrecht auf Ihnen stehen auch parallel sind. Sind nun n Ebenen in allgemeiner Lage gegeben, so finden wir offensichtlich eine Gerade, die eine andere Richtung hat als die n Richtungen der Senkrechten auf den vorhandenen Ebenen. Entlang dieser Geraden schieben wir eine Ebene so lange entlang bis wir keine parallelen Schnittgeraden oder mehrfache Schnittpunkte haben. Fügt man diese Ebene zu den anderen Ebenen hinzu, so erhalten wir n+1 Ebene in allgemeiner Lage. Die Antwort auf die erste Frage ist somit „Ja“.

Zu 2):
Nun nehmen wir mal an, die Anzahl Teilstücke bei n Ebenen in allgemeiner Lage sei schon bestimmt, und wir nehmen eine neue, n+1-te Ebene dazu. Dann entsteht in dieser neuen Ebene ein Muster von Geraden, dort wo sie sich mit den n ursprünglichen Ebenen schneidet, und von Flächenstücken dazwischen. Die entscheidende Beobachtung ist nun: **Jedes solche Flächenstück bedeutet ein Stück des Raumes (oder des Würfels), das durch unsere neue Ebene zerschnitten wird.** Um zu wissen, wie viele neue Teile dazukommen, müssen wir also nur diese Flächenstücke zählen. Wir haben das Zählproblem in die Ebene verlagert:

In wie viele Flächenstücke können 1, 2, 3, ... m Geraden eine Ebene höchstens zerlegen?

Offensichtlich zerlegt eine Gerade die Ebene in zwei Stücke, und zwei Geraden, die sich schneiden, in vier Stücke.

Stellen wir uns für einen Augenblick vor, wir wissen die Antwort für vier Geraden bereits und nehmen jetzt eine zusätzliche, fünfte Gerade hinzu. Ist sie zu den bisherigen vier Geraden nicht parallel, so schneidet sie alle vier und es entstehen wie in der Skizze 4 Schnittpunkte, entsprechend 5 Stücke auf der neuen Geraden. Jedes dieser Stücke zerlegt eine Fläche in zwei Teile, d. h. es entstehen 5 neue, zusätzliche Flächenstücke.



Im Allgemeinen geht es genauso: Wenn wir die Antwort für m Geraden bereits wissen, nehmen wir eine zusätzliche, m+1-te Gerade dazu; diese schneidet die „alten“ in m Schnittpunkten, produziert also m+1 neue Flächenstücke. Berechnen wir die ersten Anzahlen so erhalten wir:

Anzahl Geraden	1	2	3	4	5	6	...
Anzahl „neue“ Flächenstücke		2	3	4	5	6	...
Anzahl Flächenstücke insgesamt	2	4	7	11	16	22	...

Mit etwas Mathematik, der sogenannten vollständigen Induktion, kann man leicht die folgende Formel für Anzahl Flächenstücke beweisen:

m Geraden in allgemeiner Lage zerlegen die Ebene in 1/2 (m2 + m + 2) Flächenstücke.

Wir wollen nun diese Formel auf unser ursprüngliches Problem anwenden:
Wir hatten ja festgestellt, dass wir wissen, wenn n Ebenen in allgemeiner Lage den Raum zerschneiden und jetzt eine neue, n+1-te Ebene hinzugenommen wird, genauso viele zusätzliche Stücke hinzukommen, wie es in der neuen Ebene Flächenstücke gibt und diese Anzahl haben wir soeben bestimmt. Berechnen wir nun diese Anzahl so erhalten wir die folgende Tabelle, die unser ursprüngliches Problem löst:

Anzahl Ebenen	1	2	3	4	5	6	7	...
Anzahl „neue“ Raumstücke		2	4	7	11	16	22	...
Anzahl Raumstücke insgesamt	2	4	8	15	26	42	64	...

Auch hier gibt die *vollständige Induktion* eine Formel:
Mit n Ebenen in allgemeiner Lage erhält man 1/6 (n3 + 5n + 6) Stücke.

Die beiden Antworten lassen sich nun einfach ablesen:
4 Ebenen zerlegen den Raum in höchstens 15 Stücke und man braucht 7 Ebenen, um mindestens 50 Raumstücke zu erhalten.

Noch sind wir nicht ganz fertig – wir hatten ja nicht nach der Zerlegung des ganzen dreidimensionalen Raums, sondern nach der eines begrenzten Würfels gefragt! Das ist aber eher unerheblich, wie folgende Überlegung zeigt: Die endlich vielen Schnittpunkte unserer ersten vier bzw. sieben Ebenen liegen alle in einem begrenzten Bereich. Indem man (wenn nötig) die ganze Konfiguration verkleinert, kann man erreichen, dass sie alle im Innern des Würfels liegen, so dass ein Würfel mit vier Ebenen in höchstens 15 Teile zerlegt werden kann. Um mindestens 50 Stücke zu erhalten, reichen daher sieben Ebenen aus.

Rätsel „50 Jahre“:

In dem Rätsel „50 Jahre“ ist das Jahr gesucht, in dem das erste Großforschungsprojekt in Mathematik an der Universität Bielefeld gestartet ist.

Der Hinweis zu diesem Jahr lautet:
„In diesem Jahr wird die Fakultät für Mathematik 50 Jahre alt und damit fünfmal so alt wie das erste Bielefelder Großforschungsprojekt in Mathematik in dem Jahr war, in dem die Gründung der Fakultät genauso lang zurücklag wie der Start des ersten Großforschungsprojekts heute.“

Eigentlich verbergen sich hinter diesem Rätsel gar nicht viel komplizierte Mathematik oder aufwändige Rechnungen. Das Problem liegt vielmehr darin, dass die Informationen auf eine Art gegeben werden, die nicht leicht zu verarbeiten ist. Hier kann eine mathematische Grundfertigkeit helfen, nämlich die Strukturierung und formale Erfassung des Problems:

Lösung:

Wir bezeichnen mit X das in dem Rätsel gesuchte Jahr des Starts des ersten Großforschungsprojektes. Dann gibt 2019 – X die Anzahl Jahre an, die dieser Start heute zurückliegt. Ferner ist X+10 das Jahr, in dem das Großforschungsprojekt 10 Jahre alt war. Nach dem Hinweis ist X+10 genau das Jahr, in dem die Gründung der Fakultät genauso lang zurücklag wie der Start des ersten Großforschungsprojekt heute. Da die Fakultät vor 50 Jahren, also 1969, gegründet wurde und dann 2019 – X Jahre bis zu dem gesuchten Jahr vergangen sind, gilt:

$$X + 10 = 1969 + (2019 - X)$$

Auflösen nach X liefert: $2X = 1969 + 2019 - 10 = 3978$, also $X = 1989$

Die Lösung lautet also 1989.

In der Tat startet 1989 der erste Sonderforschungsbereich (SFB) in Mathematik an der Universität Bielefeld. Sonderforschungsbereiche sind langfristige, auf die Dauer von bis zu zwölf Jahren angelegte von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) finanzierte Forschungseinrichtungen, in denen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler im Rahmen eines fächerübergreifenden Forschungsprogramms zusammenarbeiten. Sie ermöglichen die Bearbeitung innovativer, anspruchsvoller, aufwändiger und langfristig konzipierter Forschungsvorhaben durch Koordination und Konzentration von Personen und Ressourcen. 1989 startete in Bielefeld der Sonderforschungsbereich 343 „Diskrete Strukturen in der Mathematik“: Diskrete Strukturen spielen in der Mathematik und ihren Anwendungen eine zentrale Rolle. Die grundsätzliche Tendenz menschlichen Denkens, komplexe Sachverhalte durch Begriffe zu strukturieren, zeigt sich in der Mathematik in der fortschreitenden Axiomatisierung, Formalisierung und Algebraisierung. Diskrete und kontinuierliche Methoden befinden sich in der Mathematik in einem lebendigen Wechselspiel, das sich nicht nur in mathematischen Forschungsinhalten widerspiegelt. sondern sich auch auch auf einer anderen Ebene zeigt: Unser sprachliches, lineares Denken drängt zur Algebraisierung. Andererseits ermöglichen es gerade die modernen, schnellen, auf Diskretisierung beruhenden Rechensysteme, geometrische Objekte nicht nur durch Graphiken, Bilder und Prozessabläufe zu veranschaulichen, sondern auch interaktiv zu manipulieren. Vielen mathematischen Objekten lassen sich diskrete Invarianten zuordnen, die wichtige Eigenschaften beschreiben oder gar die betrachteten Objekte klassifizieren. Kombinatorische Strukturen treten selbst dort auf, wo mit kontinuierlichen Invarianten gearbeitet werden muss. Schon in der Mathematik des 19. Jahrhunderts wurden endliche Strukturen thematisiert, selbst beim Studium kontinuierlicher Phänomene.

Seit dieser Zeit wurden ohne Unterbrechung Sonderforschungsbereiche oder andere große Verbundprojekte von der Fakultät eingeworben, u. a.:

SFB 701 „Spektrale Strukturen und Topologische Methoden in der Mathematik“ (2005-17)

SFB 1283 „Unsicherheit beherrschen und Zufall sowie Unordnung nutzen in Analysis, Stochastik und deren Anwendungen“ (seit 2017)

Rätsel „Stundenplan“:

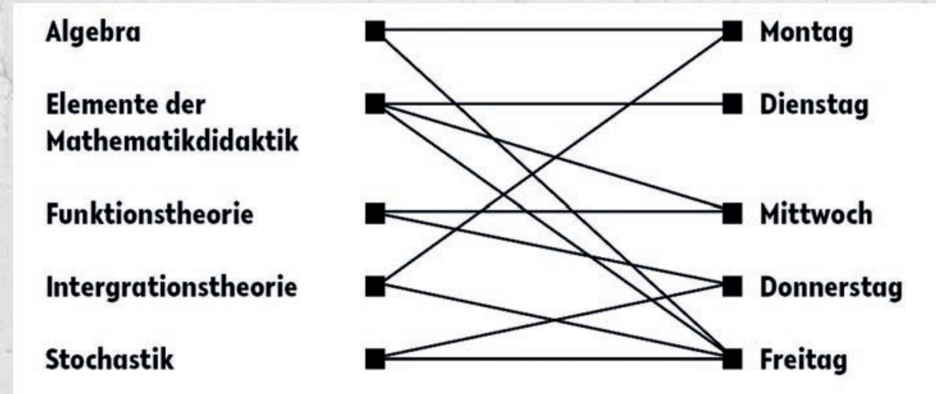
In dem Rätsel „Stundenplan“ ging es darum zu entscheiden, ob es möglich ist, dass die Vorlesungen „Algebra“, „Elemente der Mathematikdidaktik“, „Funktionentheorie“, „Integrationstheorie“ und „Stochastik“ an verschiedenen Wochentagen stattfinden können, wenn die Lehrenden für die Vorlesungen die folgenden möglichen Veranstaltungstage angegeben haben:

- Algebra: Montag oder Freitag
- Elemente der Mathematikdidaktik: Dienstag, Mittwoch oder Freitag
- Funktionentheorie: Mittwoch oder Donnerstag
- Integrationstheorie: Montag oder Freitag
- Stochastik: Donnerstag oder Freitag

Die weitere Frage war, ob eine solche Verteilung der Vorlesungen auf die Wochentage dann eindeutig ist.

Lösung:

Verschaffen wir uns erst einmal einen Überblick über die Situation, in dem wir die Vorlesungen und die Wochentage jeweils in einer Spalte aufführen und zwischen einer Vorlesung und einem Wochentag eine Verbindungslinie einzeichnen, wenn die Vorlesung an dem Wochentag angeboten werden könnte. Dann ergibt sich folgendes Bild:



Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass die Vorlesungen Algebra und Integrationstheorie beide nur montags oder freitags stattfinden können. Entsprechend sind diese beiden Tage durch diese beiden Vorlesungen belegt und stehen für die anderen Vorlesungen nicht mehr zur Verfügung. Da die Stochastik-Vorlesung nur donnerstags und freitags gehalten werden soll, bleibt für sie somit nur der Donnerstag übrig. Damit fällt der Donnerstag für die Funktionentheorie als Veranstaltungstag weg und sie muss am Mittwoch stattfinden. Da nun Mittwoch und Donnerstag belegt sind, bleibt für die Vorlesung Elemente der Mathematikdidaktik nur noch der Dienstag übrig.

Insgesamt kann man also festhalten, dass eine Verteilung der Vorlesungen auf verschiedene Wochentage entsprechend der Vorschläge der Lehrenden möglich ist. Da wir bei der Verteilung der Algebra und der Integrationstheorie auf Montag und Freitag frei wählen können, gibt es zwei mögliche Verteilungen, d. h. **es gibt keine eindeutige Zuordnung der Vorlesungen zu den Wochentagen**. Stellen wir die möglichen Zuordnungen dar, indem wir in dem obigen Bild die ausgewählten Verbindungslinien in Grün oder Blau markieren, so erhalten wir folgendes Bild:

Das Rätsel ist eine Anwendung des sogenannten *Heiratssatzes*, der eine Antwort auf das folgende Problem liefert:

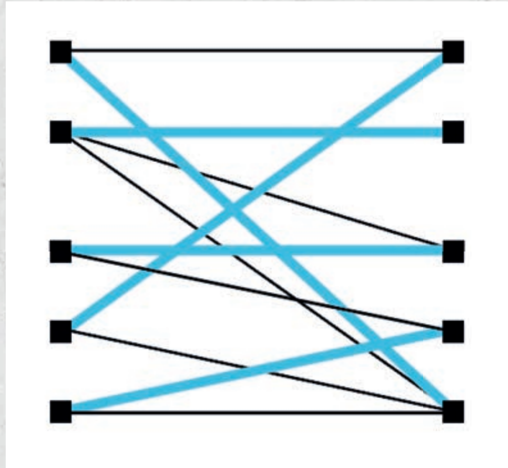
Gegeben seien eine endliche Menge F heiratswilliger Frauen und dazu eine endliche Menge M von mit diesen Frauen befreundeten Männern. Für jede Frau f aus F sei M(f) die Menge der mit f befreundeten Männer.

Dann ist die Frage:
Unter welchen Bedingungen lassen sich die Frauen mit den Männern so verheiraten, dass jede Frau einen der mit ihr befreundeten Männer heiratet, ohne dass die Monogamieregel verletzt wird?

Mathematisch kann man den Heiratssatz graphentheoretisch formulieren:

Sei G ein bipartiter Graph, d.h. eine Menge von Punkten (■), die in zwei Gruppen F und M aufgeteilt sind und von denen einige Punkte aus F mit Punkten aus M durch eine Verbindungslinie verbunden sind. In der Graphentheorie heißen die Punkte auch *Ecken* und die Verbindungslinien *Kanten*. In der oben genannten Fragestellung wird ein sogeanntes *Matching* gesucht, also eine Menge von verschiedenen Kanten, die keine Ecke des Graphen gemeinsam haben. In dem folgenden Bild eines bipartiten Graphen sind die Kanten eines Matchings blau markiert:

F



M

Der Heiratssatz lautet nun:

In einem bipartiten Graphen G mit der Zerlegung der Ecken in die Mengen F und M gibt es genau dann ein Matching, in dem alle Ecken aus F vorkommen, wenn für jede Teilmenge A von F gilt, dass die Anzahl der Ecken in A die Anzahl der Ecken in M, die mit einer Ecke aus A durch eine Kante verbunden sind, nicht übersteigt.

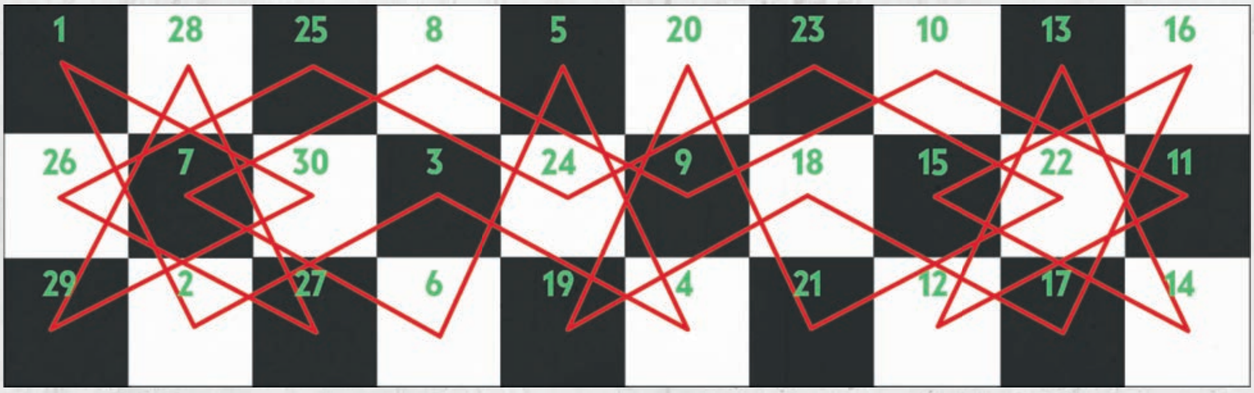
Einen Beweis findet man zum Beispiel in dem *Buch der Beweise* von Martin Aigner und Günter M. Ziegler.

Rätsel „Schachbrett“:

In dem Rätsel „Schachbrett“ war die Frage gestellt, ob es auf einem 3 x 10-Schachbrett einen geschlossenen Springerweg gibt, der alle Felder genau einmal besucht und falls ja – wie viele verschiedene Wege exisitieren.

Lösung:

Die Antwort lautet „Ja“, es gibt solche Springerwege und bis auf Wahl des Startpunkts und der Richtung des Durchgangs sind es genau 16 verschiedene. Das folgende Bild zeigt einen möglichen Springerweg:



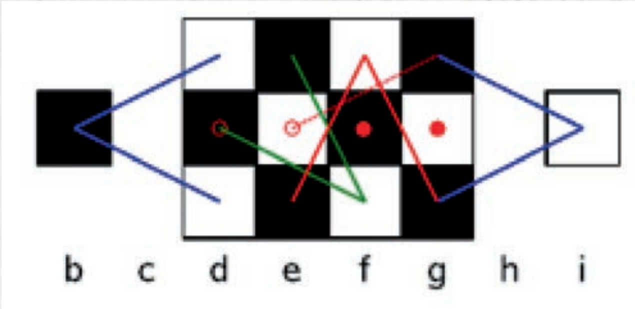
Mit diesem Beispiel auf dem Bild ist zwar die Existenz einer Lösung der Aufgabe nachgewiesen, es bleibt aber noch zu überlegen, wie viele echt verschiedene Springerwege vorhanden sind. Dazu müssen wir uns etwas mehr anstrengen:

Wie bei einem üblichen Schachbrett mit 64 Feldern bezeichnen wir die einzelnen Felder mit Buchstaben und Zahlen. Dabei stehen die Buchstaben a bis j für die Spalten und die Zahlen 1 bis 3 für die Zeilen des Schachbretts (siehe auf dem folgenden Bild). Nach den Schachregeln kann ein Springer nun zum Beispiel von c3 nach a2 springen und von dort weiter nach c1. Auf einem geschlossenen Springerweg muss ein Springer, der alle Felder genau einmal benutzt, den Teilweg c3-a2-c1 in dieser oder in umgekehrter Reihenfolge einmal durchlaufen, da er von a2 nur auf die Felder c1 oder c3 weiterspringen kann. Es ergeben sich noch mehr Zwänge: Betrachten wir die Felder a1, a3, j1, j3, b2, i2, j2, welche ebenfalls nur 2 Möglichkeiten für den Springer besitzen weiterzuspringen, so sehen wir schnell, dass die in dem folgenden Bild rot eingezeichneten Teilwege ebenfalls zwingend in der einen oder anderen Richtung vom Springer durchlaufen werden müssen.

Zusätzlich sind in dem obigen Bild die Felder d2, e2 und f2, g2 rot markiert, da sich hier weitere Zwänge ergeben: Von den Feldern b1 und b3 kann der Springer nachdem er den Teilweg b1-a3-c2-a1-b3 durchlaufen hat nur nach d2 und c3 bzw. d2 und c1 springen. Der Weg kann daher weder von beiden nach d2 noch von beiden auf die Felder auf der c-Spalte führen, da sich ansonsten ein zu kurzer geschlossener Springerweg ergäbe. Zudem können wir feststellen, dass das Feld e2 mit je einem Feld auf der c- und der a-Spalte verbunden werden muss.
Zusammengefasst geht also jeder Weg vom Feld d2 über b1 (oder über b3) auf den rot eingezeichneten Teilweg, führt über b3-c1 (bzw. b1-c3) auf den Teilweg c1-a2-c3 und landet schließlich auf dem Feld e2. Analoges lässt sich über die rechte Bretthälfte feststellen.

Aufgrund dieser Überlegungen können wir den Felderkomplex bestehend aus dem Rechteck d1-d3-

g3-g1 sowie den Feldern b2 und i2 nun separat betrachten, da jeder geschlossene Springerweg, der alle Felder des Bretts besucht, die übrigen Felder links von dem oben genannten Rechteck in Folge und die restlichen Felder rechts von dem Rechteck ebenfalls in Folge besucht, wobei die Teilwege jeweils in den rot markierten Felder d2 und e2 bzw. f2 und g2 beginnen oder enden.



Wir beginnen unsere Betrachtung beim Feld e2. Dort gibt es für einen Springer zwei Nachbarfelder, auf die er springen kann zur Auswahl: g1 und g3. Wir entscheiden uns für g3 (Wählen wir g1, so ergibt sich die an der der waagrechten Mittellinie gespiegelte Lösung.) und folgen damit der gestrichelten Linie. In Folge ist der Springer gezwungen den Teilweg über i2, g1, f3 nach e1 zu gehen, denn mit einem Sprung von f3 nach d2 würde er seinen Weg schon in der linken Bretthälfte beenden.

Bei Start in Feld d2 führt der grüne Weg notwendigerweise weiter über f1 nach e3. Hier kann der Springer wählen, ob er nach d1 oder nach g2 weiterspringt. Dementsprechend gibt es zwei (bzw. durch Spiegelung an der waagrechten Mittellinie sogar vier) verschiedene Lösungen für einen Weg auf dem obigen Felderkomplex, nämlich:

- (e2)-g3-i2-g1-f3-e1-d3-b2-d1-(f2) und (d2)-f1-e3-(g2)
- (e2)-g3-i2-g1-f3-e1-(g2) und (d2)-f1-e3-d1-b2-d3-(f2)

Die Teilwege in den verschiedenen Bretteilen lassen zu einem geschlossenen Springerweg zusammensetzen, der alle Felder genau einmal besucht, und jeder geschlossene Springerweg stimmt mit einem von diesen Wegen überein. Beim Zusammensetzen der Wege haben wir in der linken und in der rechten Bretthälfte jeweils zwei Wahlmöglichkeiten und für den übriggebliebenen Felderkomplex insgesamt vier Möglichkeiten. Die Kombination dieser Wahlen führt jeweils auf verschiedene geschlossene Springerzüge, die alle Felder genau einmal besuchen. Es gibt daher bis auf Wahl des Startortes und der Durchlaufrichtung des Weges insgesamt 2· 2· 4 = 16 abgeschlossene Springerwege, die jedes Feld genau einmal besuchen.